Institut la centrale

Matrices

Algebre 1

1/ Définition

On appelle matrice M de type $m \times n$, un tableau rectangulaire d'elements a_{ij} de $K = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

$$M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2/ Types de matrices / Définitions :

M est une matrice carrée si $n = m$. M est dite d'ordre n

$\mathcal{M}_n(K)$ est l'ens des matrices carrées

M est diagonale si $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$; $M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

M est triangulaire inferieure (superieure) si :

$\forall i < j \quad (i > j) \quad : \quad a_{ij} = 0$

I_n matrice unité $\quad I_1 = (1)$; $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ...

la matrice transposée de $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est ${}^tM = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ / $b_{ji} = a_{ij}$

M est symetrique si ${}^tM = M$, antisymétrique si ${}^tM = -M$

3/ Operations sur les matrices

a/ $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ $\quad N = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

Somme : $M + N = (c_{ij}) \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Multiplication par 1 scalaire $\quad \alpha . M = (c_{ij})$; $c_{ij} = \alpha . a_{ij}$

b/ Produit $\quad M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ $\quad N = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

$$MN = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{où} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

c/ Propriétés

- $(M+N)+P = M+(N+P)$; $M+N = N+M$, $M+0 = 0+M = M$
- $M.(N.P) = (M.N).P$. En general $MN \neq NM$ (produit n'est pas commutatif)
- $M.I = I.M = M$
- l'ensemble le matrice $(M_n(K), +, \times)$ est un anneau non commutatif non integre (càd admet les diviseurs de zero : $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq 0$)
- l'ensemble $(M_n(K), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K.

d/ Matrice inversible

Definition : $M \in M_n(K)$ est inversible si il existe M' de $M_n(K)$ tellque $M.M' = M'N = I$ et on note $M' = M^{-1}$

Theoreme : Si M et N sont 2 matrice inversible alors MN est inversible et on a $(MN)^{-1} = N^{-1}.M^{-1}$

4/ Matrices d'une application lineaire

a/ Definition :

g application lineaire de E vers F

$B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ base de E et $B' = (f_i)_{1\leq i\leq m}$ base de F

Posons $g(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$: On note $M = M(g, B, B')$: la matrice de g dans les base B et B' est la matrice des vecteurs colonne $(f(e_j))_{1\leq j\leq n}$

b/ Matrice de l'image d'un vecteur

Soit $X \in E$ et $Y = g(X) \in F$ alors $Y = M(g, B, B').X$

c/ Matrice de la composeé de 2 applications lineaires

C1 : $M(h\circ g, B, B'') = M(h, B', B'') \times M(g, B, B')$

C2 : Si $\dim E = \dim F = n$ alors g un isomorphism de E ssi M(g, B, B') est inversible et $M(g^{-1}, B', B) = [M(g, B, B')]^{-1}$

d/ Changement de base

Theoreme : $A = M(f, B, B_1)$ et $A' = M(f, B', B_1')$ alors $A' = P^{-1}AP$

où $P = M(Id, B_1, B_1')$ matrice de passage de B_1 à B_1'

5/ Rang d'une matrice :

M matrice de type $m \times n$

le rang de M est le rang des vecteurs ligne ou des vecteurs colonne de M

Propriété : $0 \leq rg M \leq \min(n, m)$; $rg\, 0 = 0$ 0 matrice nulle

1/ Définitions

- E et F 2 espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimensions finies l'application : $f : E \longrightarrow F$ est lineaire si :

  i/ $\forall (x,y) \in E^2$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

  ii/ $\forall \alpha \in K$: $\forall x \in E$: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

  Ce qui equivaut à : $\forall (x,y) \in E^2$; $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

- Toute application lineaire de E dans E est dite un endomorphisme de E
- Toute application bijective et lineaire de E dans F est un isomorphisme et f^{-1} est l'application réciproque de F dans E est lineaire et bijective
- Toute endomorphisme bijectif de E est un automorphisme de E
- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ (resp. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$) : ensemble des applications lineaires de E dans F (dans E)

2/ Noyau et Image

Soit f une application lineaire de E dans F

a/ Noyau de f : $\ker f = \{x \in E \ / \ f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

Propriété : . $\ker f$ est un s.e.v de E

Theoreme : f est injective de $E \to F \iff \ker f = \{0\}$

b/ Image de f : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) ; x \in E\} = \{y \in F : \exists x \in E ; y = f(x)\}$

Propriété : $\operatorname{Im} f$ est un s.e.v de F

Theoreme : f est surjective de $E \longrightarrow F \iff \operatorname{Im} f = F$

3/ Theoreme

Si f est une application lineaire de E dans F alors tout espace vectoriel supplementaire dans E du noyau, $\ker f$, est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.

4/ Propriétés et theoremes

f application lineaire de E dans F et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ partie de E

- Si A engendre E alors $f(A)$ engendre $f(E)$
- Si A est liée dans E alors $f(A)$ est liée dans F

Remarque : l'image d'une partie libre n'est pas libre en général

- f est injective $\Leftrightarrow$ l'image de f par toute partie libre de E est une partie libre de E

- Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ n vecteurs de F : il existe une application linéaire unique f de E dans F telle que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $f(e_i) = u_i$

Conséquence : Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base de E

5/ Rang d'une application linéaire

a/ Définition : $rg f = \dim \operatorname{Im} f$

b/ Théorème : Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de E, le rang de f est égal au rang des vecteurs $(f(e_1); f(e_2), \dots, f(e_n))$ càd le nombre maximum de ces vecteurs linéairement indépendants.

c/ Théorème

Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire alors
$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ ou encore $\dim E = \dim \ker f + rg f$

d/ Corollaire 1

* f injective $\Leftrightarrow$ $rg f = \dim E$
* f surjective $\Leftrightarrow$ $rg f = \dim F$

e/ Corollaire 2

E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow$ $\dim E = \dim F$

f/ Corollaire 3

Si f est linéaire et $\dim E = \dim F$ alors
f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective




ETUSUP.com